ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

XII Сем. **№ 140.** № 8.

Содержаніе: Основы ученія о величинахъ, *А. Мануйлова* (Продолженіе).— Нужны ли экзамены по математикѣ и физикѣ? *Г. И.* (Продолженіе). — Задачи №№ 333 и 338. — Задачи на испытаніяхъ зрѣлости. — Рѣшенія задачъ (2 сер.). №№98, 132, 260, 267, 271 и 275.

ОСНОВЫ УЧЕНІЯ О ВЕЛИЧИНАХЪ.

(Продолженіе).

28. *Цѣлое болѣе каждой изъ своихъ частей*, или каждая часть менѣе своего цѣлаго, т. е.

a) Каждое слагаемое менѣе суммы.

b) Остатокъ и вычитаемое менѣе уменьшаемаго.

c) Множимое менѣе произведенія.

d) Частное въ 1-мъ дѣленіи менѣе дѣлимаго.

e) Дѣлитель во 2-мъ дѣленіи менѣе дѣлимаго.

29. *Число частей есть цѣлое отвлеченное число*, т. е.

a) Множитель есть цѣлое отвлеченное число.

b) Дѣлитель въ 1-мъ дѣленіи есть цѣлое отвлеченное число.

c) Частное во второмъ дѣленіи есть цѣлое отвлеченное число.

Въ явномъ *противорѣчіи* съ этими выводами находятся самыя обыкновенныя математическія предложенія, или задачи.

Примѣры:

30. Требуется изъ 7 вычесть 10.

Это требованіе противорѣчитъ предложенію 28, по которому цѣлое должно быть болѣе своей части.

31. Площадь прямоугольника равна своему основанію, умноженному на высоту.

Это предложеніе противорѣчитъ пред. 27, по которому произведеніе и множимое должны быть однородныя величины. Оно противорѣчитъ также предл. 29, по которому множитель есть цѣлое отвлеченное число (множество), а не величина въ родѣ длины.

32. Раздѣлить 3 аршина на 8 аршинъ.

http://vofem.ru

Это требованіе противорѣчитъ предл. 28, по которому цѣлое (дѣлимое) болѣе своей части (дѣлителя).

33. Умножить 7 фунтовъ на $^3/_4$.

Это требованіе противорѣчитъ предл. 29, по которому множитель долженъ быть цѣлымъ, а не дробнымъ числомъ.

34. Раздѣлить 6 аршинъ на $^2/_3$.

Это требованіе противорѣчитъ предл. 29, по которому дѣлитель (число частей) долженъ быть цѣлымъ числомъ.

35. Всѣ эти предложенія отъ 30 до 34 нелѣпы, если мы будемъ разумѣть ихъ въ буквальномъ смыслѣ. Только какъ *иносказанія* они имѣютъ смыслъ. Слѣдовательно, всѣ эти предложенія, 30 — 34, иносказательныя, метафорическія или фигуральныя выраженія. Обиліе иносказаній въ научномъ или философскомъ разсужденіи не составляетъ его достоинства. Напротивъ того, можно привести безчисленное множество примѣровъ злоупотребленія иносказаніями. Множество заблужденій, ошибокъ, предразсудковъ имѣютъ своимъ источникомъ иносказанія. Мысли, выраженныя иносказательно, очень часто служатъ предметомъ споровъ и разногласій, исчезающихъ только при переводѣ ихъ на обыкновенный языкъ. Поэтому весьма естественнымъ является вопросъ, почему въ математикѣ, считаемой образцомъ точности, логической послѣдовательности и абсолютной истинности своихъ выводовъ, постоянно допускаются иносказанія. Почему длинныя, запутанныя математическія разсужденія, испещренныя иносказаніями, всегда ведутъ къ несомнѣннымъ выводамъ? Словомъ, почему въ математикѣ иносказанія не приносятъ такого же вреда, какъ и въ философскихъ разсужденіяхъ? Рѣшеніе этого вопроса заставляетъ насъ уклониться въ сторону — въ область теоріи познанія.

36. Различныя явленія въ объективномъ ли мірѣ, въ области ли субъективныхъ ощущеній и чувствованій, или же въ мышленіи, выясняются отвѣтами на вопросы: *на какомъ основаніи? по какой причинѣ? для какой цѣли?* Это значитъ, что всякое явленіе объясняется другимъ явленіемъ, которое есть, или его *основаніе* (ratio, raison, Grund), или его *причина* (causa), или его *цѣль* (finis, Zweck). Объяснить явленіе значитъ одно изъ трехъ: *a*) показать, что объясняемое явленіе есть необходимое логическое слѣдствіе другого явленія, которое въ этомъ случаѣ служитъ основаніемъ; *b*) показать, что объясняемое явленіе есть проявленіе (effectum) дѣйствія (actio), которое называется причиной (causa); и *c*) показать, что объясняемое явленіе есть средство для достиженія цѣли. И такъ различныхъ объясненій явленій три: 1) *раціональное* объясненіе или *обосновываніе* 2) *каузальное* объясненіе или *причинность* и 3) *финальное* или *телеологическое* объясненіе.

Каждое изъ этихъ объясненій имѣетъ свои особенности и зиждется на особыхъ началахъ.

При сложеніи двухъ дробей $^5/_6$ и $^2/_9$ мы замѣняемъ $^5/_6$ дробью

$^{15}/_{18}$, а $^{2}/_{9}$ дробью $^{4}/_{18}$ и затѣмъ, складывая числителей, находимъ сумму $^{19}/_{18}$.

Замѣна дроби $^{5}/_{6}$ дробью $^{15}/_{18}$ совершается на томъ *основаніи*, что дробь не мѣняетъ своей величины отъ умноженія ея числителя и знаменателя на одно и то же число. На томъ же основаніи произведена замѣна дроби $^{2}/_{9}$ дробью $^{4}/_{18}$. Но этимъ дѣло еще не выяснено; дробь $^{5}/_{6}$ на томъ же основаніи можетъ быть замѣнена и дробями $^{10}/_{12}$, $^{20}/_{24}$, $^{25}/_{30}$, $^{35}/_{42}$,.... и потому надо объяснить, почему дробь $^{5}/_{6}$ замѣнена дробью $^{15}/_{18}$, а не дробью $^{10}/_{12}$, или $^{25}/_{30}$ и т. п. Замѣна дробей $^{5}/_{6}$ и $^{2}/_{9}$ дробями $^{15}/_{18}$ и $^{4}/_{18}$ (а не другими какими либо равными имъ дробями) выясняется *цѣлью* — привести дроби къ одному знаменателю. Но можно эти дроби привести къ одному знаменателю и иначе, напр., замѣнивъ ихъ дробями $^{30}/_{36}$ и $^{8}/_{36}$. Надо, слѣд., объяснить, почему мы привели слагаемыя дроби къ одному знаменателю 18, а не къ знаменателю 36 или 54 и пр. Отвѣтомъ на это служитъ слѣдующее: Когда мы можемъ достигнуть цѣли многими различными средствами, то *выбираемъ* изъ нихъ *простѣйшія;* наипроще цѣль наша будетъ достигнута приведеніемъ слагаемыхъ дробей къ наименьшему знаменателю 18. Наконецъ приведеніе дробей къ одному знаменателю выясняется *цѣлью* — найти сумму данныхъ дробей. Итакъ при сложеніи дробей мы руководствуемся съ одной стороны *раціональными* началами, указывая *основаніе* того или другого дѣйствія, и съ другой, *финальными* началами, выясняя *цѣлью* выборъ того или другого преобразованія изъ множества другихъ преобразованій, допускаемыхъ раціональными началами.

37. Всѣ явленія въ области чистой математики объясняются только раціональными и финальными началами; причинность же нужна для объясненія явленій въ другихъ отрасляхъ знаній. Такъ какъ наша цѣль выяснить ариѳметическія дѣйствія, то мы остановимся преимущественно на выясненіи обосновыванія и цѣлесообразности, или же, говоря иначе, на выясненіи раціональныхъ и финальныхъ началъ въ мышленіи.

38. *Обосновываніе* есть чисто мыслительный процессъ, независимый отъ опыта, и состоитъ въ установленіи апріорной связи между основаніемъ и его слѣдствіемъ. „Только наше мышленіе выводитъ слѣдствіе изъ его основанія; при этомъ существуетъ ли выведенное слѣдствіе, какъ опытный фактъ, или нѣтъ, по отношенію къ обосновыванію совершенно безразлично“, говоритъ Вундтъ въ своей Логикѣ. Въ правильномъ стоугольникѣ каждый внутренній уголъ равенъ 176°24′; это a priori найденное утвержденіе вѣрно даже и въ томъ случаѣ, если въ природѣ нигдѣ нѣтъ и никогда не было правильнаго стоугольника.

Различныхъ видовъ обосновыванія два.

39. Первый видъ обосновыванія состоитъ въ переходѣ *отъ общаго* сужденія *къ частному* и зиждется на слѣдующемъ началѣ: все, что утверждается относительно цѣлой группы предметовъ (напр. относительно дерева), можетъ быть утверждаемо относи-

тельно другой группы предметовъ, составляющей часть первой группы (напр. относительно дуба).

Къ этому виду обосновыванія относятся:

a) выводъ слѣдствія изъ посылокъ въ силлогизмѣ.

b) примѣненіе общей геометрической, ариѳметической и механической теоремы къ частному случаю.

c) Примѣненіе общей алгебраической формулы къ частному случаю.

40. Самая простая и наиболѣе употребительная форма перехода отъ основанія къ его слѣдствію состоитъ *a*) въ замѣнѣ родового понятія его видовымъ понятіемъ въ словесномъ выраженіи сужденія, служащаго основаніемъ, *b*) въ замѣнѣ буквъ числами въ алгебраическихъ формулахъ, или линіями въ формулахъ аналитической геометріи, *c*) въ преобразованіи формулы въ тождественный видъ ея.

41. Этотъ переходъ въ формальной (силлогистической) логикѣ съ одной стороны, и въ алгебрѣ съ другой, облеченъ въ форму безукоризненно дѣйствующаго механизма. Впрочемъ исправность дѣйствія этого механизма зависитъ отъ соблюденія нижеслѣдующихъ условій:

1. Всѣ слова, введенныя въ разсужденіе, а также буквы и знаки дѣйствій въ алгебраическихъ формулахъ должны во всемъ разсужденіи сохранять первоначальное свое значеніе. Двусмысленность словъ и знаковъ, а также иносказанія обыкновенно разстраиваютъ этотъ механизмъ и дѣлаютъ его никуда негоднымъ.

2) Слова опредѣлительныя, дополнительныя и обстоятельственныя, присоединяемыя къ наименованію предмета, дѣйствія или состоянія, не должны измѣнять первоначальнаго смысла слова, а должны только ограничивать этотъ смыслъ. „Круглый столъ“ означаетъ нѣкоторые изъ предметовъ, называемыхъ словомъ „столъ“; „четко писать“ означаетъ нѣкоторыя изъ дѣйствій, выражаемыхъ словомъ „писать“; „смирно сидѣть“ означаетъ нѣкоторыя изъ состояній, называемыхъ словомъ „сидѣть.“ Съ этимъ условіемъ находятся въ явномъ противорѣчіи, напр., слѣдующія выраженія: квадратный аршинъ умножить на $^1/_7$, раздѣлить на $^1/_3$ и др. Въ самомъ дѣлѣ, аршинъ, есть длина, а квадратный аршинъ есть площадь; умножить на $^1/_7$ значитъ раздѣлить на 7 равныхъ частей; раздѣлить на $^1/_3$ значитъ умножить на 3.

42. Второй видъ обосновыванія состоитъ въ установленіи апріорной связи между частями одной и той же неразрывной совокупности понятій. Мы выше назвали сложеніе, разложеніе, цѣлое, части и число частей неразрывной совокупностью понятій. Точно также стороны, углы, вершины треугольника, его площадь, высота, периметръ и пр. составляютъ неразрывную совокупность линій, угловъ, точекъ и пр. Подобныхъ неразрывныхъ совокупностей понятій существуетъ очень много. Каждая ариѳметическая задача представляетъ подобную совокупность величинъ. Каждая геометрическая фигура — многоугольникъ, призма, пирамида, ко-

нусъ, цилиндъ, шаръ и т. п., представляетъ неразрывную совокупность линій, угловъ, точекъ, а иногда плоскостей и кривыхъ поверхностей и пр., связанныхъ между собою такъ, что всѣ части ея взаимно опредѣляютъ другъ друга. Точно также небо съ небесными свѣтилами для наблюдателя, находящагося въ какомъ либо опредѣленномъ пунктѣ земли, представляетъ неразрывную совокупность явленій, положеній и величинъ, взаимно другъ друга опредѣляющихъ. Каждая наука представляетъ множество разнообразныхъ совокупностей, неразрывно связанныхъ между собою понятій.

43. Взаимное обосновываніе частей одной и той же совокупности понятій рѣзко отличается отъ силлогистическаго обосновыванія. Въ силлогизмѣ

С есть В и
А есть С

Слѣдовательно А есть В

А, В и С означаютъ предметы одного и того же рода и разница между ними только та, что подъ В мы разумѣемъ самую большую группу предметовъ, подъ С — часть этой группы, а подъ А — часть группы С. — Другого различія между А, В и С, если бы оно и существовало, нѣтъ надобности принимать въ разсчетъ при выводѣ слѣдствія изъ посылокъ. Словомъ, всѣ три термина силлогизма разсматриваются какъ понятія одной категоріи, находящіяся въ соотношеніи другъ къ другу, какъ родъ и видъ. Отсюда выходитъ, что для цѣлей силлогистическаго обосновыванія предметамъ одного и того же рода даютъ различныя названія только для выраженія различія въ объемѣ. Для цѣлей же обосновыванія неразрывныхъ совокупностей понятій различными названіями предметовъ одного и того же рода, напр. прямыхъ линій, выражается различіе соотношеній другъ къ другу частей одной и той же неразрывной совокупности понятій. Напр. прямая линія получаетъ такія названія: сторона треугольника, высота треугольника, гипотенуза, катетъ, радіусъ, хорда, апоѳема и пр. Всѣ эти различныя названія прямой линіи выражаютъ ту или другую роль прямой линіи въ той или другой совокупности геометрическихъ протяженій. Часто одна и та же линія получаетъ различныя названія, коими выражается, что она въ одно и то же время играетъ одну роль въ одной совокупности, другую роль — въ другой и третью — въ третьей и т. д. Одна и та же прямая можетъ быть, напр. радіусомъ одного круга, хордой другого и катетомъ треугольника. Конечно, всѣ различныя названія прямой линіи сохраняютъ значеніе видовыхъ понятій по отношенію къ прямой линіи, какъ ихъ родовому понятію. Но при установленіи связи между частями одной и той же совокупности понятій эта сторона ихъ значенія играетъ второстепенную роль.

44. Изслѣдованіе связи между частями одной и той же совокупности понятій служитъ средствомъ къ открытію новыхъ

истинъ, между тѣмъ какъ силлогистическое обосновываніе есть только ссылка на истину, открытую инымъ путемъ, а не средствомъ къ ея открытію. Силлогистическое обосновываніе состоитъ въ переходѣ отъ общей истины къ частнымъ случаямъ ея и, слѣдовательно, состоитъ въ повтореніи въ другой формѣ того, что уже было сказано раньше. Обосновываніе же второго вида состоитъ въ переходѣ отъ соотношенія между одними частями неразрывной совокупности къ соотношенію между другими частями той же совокупности, или же въ переходѣ отъ одного соотношенія между частями совокупности къ другому соотношенію между тѣми же частями совокупности. При этомъ мы обыкновенно переходимъ отъ однихъ частныхъ случаевъ къ другимъ тоже частнымъ случаямъ, но въ то же время совершаемъ этотъ переходъ такимъ образомъ, чтобы ясно было, что онъ одинаковъ для всѣхъ частныхъ случаевъ, и такимъ образомъ обобщаемъ доказываемое соотношеніе. Приводимъ ниже нѣсколько примѣровъ подобныхъ обобщеній.

44. Положимъ, требуется доказать, что произведеніе двухъ цѣлыхъ чиселъ не измѣнится, если мы множимое примемъ за множителя, а множитель примемъ за множимое. Вѣрность этого соотношенія можетъ быть доказана двояко:

Первое доказательство. Доказываемъ сложеніемъ, что напр. 3 раза 5 есть 15, и потомъ такимъ же образомъ доказываемъ, что 5 разъ 3 есть 15. Послѣ этого заключаемъ, что 3 раза 5 и 5 разъ 3 одно и то же.

Второе доказательство. Располагаемъ группу предметовъ, состоящую изъ трехъ группъ по 5 предметовъ въ каждой, въ три ряда слѣдующимъ образомъ

. . . . .
. . . . .
. . . . .

Эта группа состоитъ изъ трехъ рядовъ по 5 предметовъ въ каждомъ, а также изъ 5 рядовъ по три премета въ каждомъ; слѣдовательно 3 раза 5 и 5 разъ 3 одно и тоже.

Каждое изъ этихъ двухъ доказательствъ можетъ быть примѣнено къ какому угодно частному случаю; но если бы, примѣнивъ первое доказательство, убѣдились въ вѣрности теоремы на милліонѣ частныхъ случаевъ, мы все таки не были бы убѣждены, что въ примѣненіи къ милліонъ первому случаю доказываемая теорема окажется вѣрной. Между тѣмъ какъ второе доказательство таково, что примѣнимость его ко всякому частному случаю на столько очевидна, что въ общности доказываемой теоремы не остается никакого сомнѣнія.

Итакъ обосновываніе второго вида всегда состоитъ въ доказательствѣ теоремы для частнаго случая и въ обобщеніи этого доказательства. Большею частью это обобщеніе состоитъ въ выясненіи общепримѣнимости, какъ самого доказательства, такъ и доказываемой теоремы ко всѣмъ частнымъ случаямъ.

45. Но иногда доказательство одной и той же теоремы для различныхъ случаевъ не одинаково. Тогда надо всѣ частные случаи разбить на нѣсколько такихъ группъ, чтобы одно и то-же доказательство было примѣнимо ко всѣмъ частнымъ случаямъ одной и той же группы. Тогда, доказавъ теорему для одного изъ случаевъ первой группы, потомъ для одного изъ случаевъ второй группы и т. д., мы наконецъ убѣждаемся въ истинности теоремы для всѣхъ частныхъ случаевъ. Примѣромъ такого доказательства можетъ служить теорема: уголъ, имѣющій вершину на окружности, измѣряется половиною дуги, заключенной между его сторонами. Всѣ частные случаи этой теоремы разбиваются на три группы: a) центръ круга находится на сторонѣ угла, b) центръ круга находится внутри угла и c) центръ круга находится внѣ угла. Доказавъ теорему для одного частнаго случая первой группы, мы выясняемъ примѣнимость того же доказательства ко всѣмъ частнымъ случаямъ этой же группы. Такимъ же образомъ мы поступаемъ и съ двумя другими группами случаевъ. Доказавъ теорему для всѣхъ трехъ группъ частныхъ случаевъ, мы выражаемъ ее въ обобщенной формѣ, примѣнимой ко всѣмъ частнымъ случаямъ безъ исключенія.

46. Иногда теорема, доказываемая для нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ, распространяется на остальные по аналогіи. Тогда законность такого обобщенія должна быть доказана. Примѣромъ такого доказательства можетъ служить выводъ Ньютоновой строки. Выяснивъ тѣмъ или другимъ способомъ законъ составленія различныхъ членовъ строки для нѣсколькихъ частныхъ случаевъ, мы по аналогіи распространяемъ его на всѣ частные случаи и потомъ доказываемъ, что законъ вѣренъ для $(n+1)$-ой степени, если онъ вѣренъ для n-ой степени. Послѣ этого общность открытаго по аналогіи закона составленія членовъ Ньютоновой строки считается доказанною.

47. Иногда, впрочемъ, доказательство теоремы ведется такъ, что нѣтъ надобности доказывать общность ея вышеупомянутымъ пріемомъ. Выяснимъ дѣло на частномъ примѣрѣ. Докажемъ теорему: во всякомъ многоугольникѣ сумма внутреннихъ угловъ равна двумъ прямымъ, взятымъ столько разъ, сколько сторонъ въ многоугольникѣ, безъ четырехъ прямыхъ.

Доказываемъ теорему для пятиугольника. Соединивъ какую нибудь точку, взятую внутри пятиугольника, со всѣми вершинами его, мы раздѣлимъ пятиугольникъ на пять треугольниковъ, т. е. (сейчасъ же обобщаемъ) на столько треугольниковъ, сколько сторонъ въ многоугольникѣ. Сумму угловъ каждаго треугольника составляютъ два прямыхъ, а потому сумма угловъ во всѣхъ пяти треугольникахъ будетъ 10 прямыхъ, т. е. (опять обобщаемъ) столько разъ два прямыхъ, сколько сторонъ въ многоугольникѣ. Сумма угловъ пятиугольника, да вообще и всякаго многоугольника, составлена только изъ угловъ треугольниковъ, но не всѣ углы треугольниковъ входятъ въ составъ угловъ многоугольника; углы тре-

http://vofem.ru

угольниковъ, не входящіе въ составъ угловъ многоугольника, расположены всѣ около одной точки, и потому сумма ихъ, какъ во взятомъ пятиугольникѣ, такъ вообще (опять обобщаемъ) и во всякомъ многоугольникѣ, равна четыремъ прямымъ. Выключивъ изъ суммы угловъ всѣхъ треугольниковъ (10-ти прямыхъ), сумму угловъ около одной точки, т. е. 4 прямыхъ, получимъ сумму угловъ многоугольника (6 прямыхъ). Слѣд. сумма угловъ многоугольника равна двумъ прямымъ, взятымъ столько разъ, сколько сторонъ въ многоугольникѣ, безъ четырехъ прямыхъ.

Можно, впрочемъ, доказать общность этой теоремы, доказавъ, что, если она вѣрна для мноугольника съ n сторонами, то она вѣрна и для многоугольника съ $n + 1$ сторонами.

48. Мы нашли нужнымъ различать два вида обосновыванія: силлогистическое обосновываніе и обосновываніе неразрывныхъ совокупностей понятій. Обыкновенно считаютъ (см. Логику Уэтли), что все наше мышленіе исчерпывается силлогистическимъ обосновываніемъ, между тѣмъ какъ между этими двумя видами обосновыванія существуетъ рѣзкая разница. Здѣсь не мѣсто подробно разбирать обосновываніе неразрывныхъ совокупностей понятій. Скажемъ только, что подробное изслѣдованіе обосновыванія второго вида открываетъ много новыхъ (т. е. не вошедшихъ въ трактаты по логикѣ) явленій въ области мышленія, имѣющихъ важное практическое значеніе. Укажемъ только на нѣкоторыя изъ такихъ явленій.

49. Всѣ части неразрывной совокупности понятій вполнѣ опредѣляются нѣсколькими изъ нихъ. Оказывается, что число частей, опредѣляющихъ совокупность, всегда одно и то же, каковы бы ни были опредѣляющія и опредѣляемыя части. Вопросъ о числѣ частей, опредѣляющихъ ту или другую совокупность, очень важенъ съ логической точки зрѣнія, а между тѣмъ онъ очень мало разработанъ. Часть этого обширнаго вопроса разработана Профессоромъ В. П. Ермаковымъ въ его статьѣ: „Число условій, опредѣляющихъ геометрическую фигуру на плоскости“, помѣщенную въ 1-мъ томѣ Журн. Элем. Мат. стр. 26.

50. При переходѣ отъ опредѣляющихъ частей совокупности къ опредѣляемымъ, обыкновенно вся сложная совокупность разлагается на рядъ простыхъ совокупностей, число которыхъ ограничено. Для нѣкоторыхъ совокупностей, напр. для сложныхъ ариѳметическихъ совокупностей, опредѣлены и изслѣдованы простыя совокупности, но для геометрическихъ, механическихъ и физичнскихъ неразрывныхъ совокупностей остается еще сдѣлать очень много.

51. Сложная совокупность понятій иногда разлагается на двѣ или нѣсколько болѣе простыхъ и независимыхъ другъ отъ друга совокупностей; въ этомъ случаѣ изслѣдованіе всей совокупности значительно упрощается. Съ практической точки зрѣнія такіе случаи заслуживаютъ особаго вниманія.

52. Иногда опредѣляющимъ частямъ совокупности соотвѣтствуетъ только однѣ система опредѣляемыхъ частей той же совокупности, а иногда имъ соотвѣтствуютъ двѣ, три, или нѣсколько системъ остальныхъ частей совокупности. Въ треугольникѣ двумъ сторонамъ и углу, между ними заключенному, всегда соотвѣтствуетъ одна только система остальныхъ частей совокупности, а двумъ сторонамъ и углу, лежащему противъ одной изъ данныхъ сторонъ, соотвѣтствуетъ иногда одна, иногда двѣ системы недостающихъ частей совокупности, а иногда и ни одной. Равновѣсіе плавающаго однороднаго тѣла опредѣляется его формой, его массой и плотностью жидкости, но этимъ опредѣляющимъ частямъ совокупности соотвѣтствуетъ обыкновенно нѣсколько положеній равновѣсія. Изслѣдованіе неразрывныхъ совокупностей съ этой точки зрѣнія тоже представляетъ большой интересъ. По этому вопросу тоже есть статья Проф. В. П. Ермакова подъ заглавіемъ: „Опредѣленіе числа рѣшеній геометрическихъ задачъ". См. Журн. Элем. Мат. Т. I, стр. 6.

53. Очень часто предъявляется требованіе осуществить или создать новый предметъ; тогда предметъ, который надо создать, называется *цѣлью*, а все то, что нужно для достиженія цѣли, называется *средствами*. Цѣль впервые является въ представленіи послѣ этого сперва въ представленіи, а затѣмъ и въ дѣйствительности отыскиваются средства для ея достиженія и, наконецъ, осуществляется цѣль найденными средствами.

54. Средства обязаны своимъ существованіемъ представляемой цѣли и потому представляемая цѣль можетъ быть разсматриваема какъ *причина средствъ* (causa finalis); съ другой точки зрѣнія, цѣль есть необходимое слѣдствіе ея средствъ, а потому средства служатъ *причиной цѣли*, а цѣль ихъ эффектомъ, или же средства служатъ основаніемъ, коего необходимымъ слѣдствіемъ является цѣль. Итакъ между средствами и цѣлью существуетъ такая же точно связь, 1) какъ между причиной (causa) и ея проявленіемъ (effectum), или же 2) какъ между основаніемъ (ratio) и его слѣдствіемъ. Вотъ почему предварительное знаніе каузальной, или раціональной связи между предметомъ, служащимъ цѣлью, и предметами, которые могутъ быть его средствами, есть необходимое условіе успѣха въ отыскиваніи средствъ.

(Продолженіе слѣдуетъ).

НУЖНЫ ЛИ ЭКЗАМЕНЫ ПО МАТЕМАТИКѢ И ФИЗИКѢ?

(Продолженіе). *)

Перейдемъ теперь къ центру тяжести всѣхъ возраженій противъ экзаменовъ, къ нападкамъ на ихъ систему. Не будемъ оста-

*) См. В. О. Ф. № 135 и 137.

http://vofem.ru

навливаться на частностяхъ, подвергая разбору тотъ либо другой нынѣ принятый на практикѣ порядокъ, а попробуемъ освѣтить вопросъ съ общей точки зрѣнія и найти существенную причину неудовольствій и упрековъ.

Когда главнокомандующій дѣлаетъ смотръ войскамъ и, желая убѣдиться въ ихъ пригодности и готовности на случай войны, назначаетъ маневры, примѣрныя сраженія, штурмы и пр., мы всѣ скажемъ, что онъ дѣлаетъ экзаменъ войскамъ, и мы всѣ знаемъ, что солдаты идутъ на такой экзаменъ съ радостнымъ воодушевленіемъ, съ безусловной вѣрой въ своихъ непосредственныхъ начальниковъ, съ веселой надеждой заслужить названіе „молодцовъ". Оно и понятно: незачѣмъ солдату выглядѣть мокрой курицей, если онъ знаетъ, что идти на маневры, хотя бы и самые утомительные, вовсе не значитъ идти сражаться на жизнь и смерть.

Напротивъ того — ученики, идущіе на экзаменъ, знаютъ, что идутъ сражаться на жизнь и смерть.

Когда контроль требуетъ съ чиновника, завѣдывающаго денежными выдачами, оправдательныхъ документовъ, когда ревизоръ провѣряетъ наличность и т. п., никто этимъ не возмущается, не находитъ этого ненужнымъ, а лицо, дѣйствія котораго контролируются, не чувствуя за собою никакой вины или упущенія, не можетъ опасаться никакого суда и слѣдствія. Контроль — не есть судилище, ревизія — не есть судебное слѣдствіе.

Экзаменъ, въ принципѣ, долженъ быть контролемъ и ревизіей, между тѣмъ на практикѣ — онъ превращенъ въ судъ присяжныхъ, и школьная экзаменаціонная скамейка—въ скамью подсудимыхъ.

На сколько нормальными можно считать такія условія — судите сами, читатель.

Итакъ, какъ бы мелочны ни были частные примѣры, приводимые въ подтвержденіе неудовлетворительности нашей школьной системы экзаменовъ, всѣ они сводятся въ сущности къ констатированію того общаго явленія, что на экзаменахъ рѣшается судьба ученика аналогично тому, какъ въ кровопролитныхъ сраженіяхъ рѣшается вопросъ о жизни и смерти солдата, или тому — какъ на судѣ случайно выбранныхъ присяжныхъ рѣшается судьба человѣка, заподозрѣннаго въ тяжкомъ преступленіи. Выдержать экзаменъ — это значитъ, по мнѣнію многихъ, миновать шальной пули на войнѣ, или, это значитъ — быть подъ судомъ и оправдаться.

Такимъ образомъ экзаменъ дѣйствительно становится „наказаніемъ", и наказаніемъ весьма тяжелымъ, а неизбѣжный вслѣдъ за симъ вопросъ „за что?" — оставаясь безъ всякаго возможнаго отвѣта—ожесточаетъ наше общество и воздвигаетъ непреодолимую преграду всѣмъ благимъ попыткамъ соглашенія между семьей и школой и установленію ихъ солидарности.

Но, не разрѣшается ли этотъ злополучный вопросъ тѣми соображеніями, которыя въ краткихъ словахъ были высказаны въ двухъ предыдущихъ бесѣдахъ? Не является ли очевидностью, что ненормальный порядокъ экзаменовъ, при которомъ они по-

лучаютъ характеръ войны и суда, есть лишь слѣдствіе той необходимости „очищенія" учебныхъ заведеній отъ несоотвѣтствующихъ ихъ программамъ учениковъ, о которомъ я говорилъ выше? Если мы *не умѣемъ* въ теченіе школьнаго курса составить себѣ безошибочное мнѣніе о пригодности ученика, въ умственномъ и физическомъ отношеніи, или, если мы *не рѣшаемся* на основаніи такой оцѣнки во время устранить негодныхъ учениковъ изъ заведенія,—тогда, конечно, не остается другого средства, какъ отложить эту категорическую оцѣнку до послѣдняго, такъ сказать, дня, т. е. до экзаменовъ. У насъ такъ именно и дѣлается, и вотъ почему, по моему мнѣнію, наши экзамены сдѣлались такъ убійственно „ужасны". Этимъ—все объясняется, и хитрости, и нервозъ, и самоубійства.

Такую систему нельзя назвать правильной. Защищать ее можно было бы въ томъ лишь случаѣ, если бы она оказывалась абсолютно неизбѣжной, если бы дѣйствительно не было *никакого другого* средства заставить родителей учениковъ больныхъ и малоспособныхъ понять, что они ихъ помѣстили не туда, куда слѣдуетъ. Но вѣдь этого нѣтъ. Напротивъ того, есть другая мѣра, которая при нынѣшнемъ даже ненормальномъ наплывѣ учащихся, кажется мнѣ гораздо болѣе раціональною, уже потому, что не подвергаетъ наказанію тѣхъ, которыхъ не за что наказывать. Я понимаю подъ такою мѣрою перенесеніе категорической оцѣнки учениковъ съ послѣднихъ дней ихъ пребыванія въ заведеніи *по возможности* на первые дни; иными словами, вмѣсто „строгихъ" окончательныхъ испытаній — я полагалъ бы болѣе цѣлесообразнымъ установленіе возможно строгихъ конкурсныхъ вступительныхъ экзаменовъ; вмѣсто того чтобы откладывать окончательную оцѣнку способностей ученика и его прилежанія до послѣдняго года и дня его пребыванія въ школѣ, было бы во всѣхъ отношеніяхъ полезнѣе составить такую оцѣнку въ первые-же годы послѣ его вступленія въ школу; вмѣсто того чтобы исключать учениковъ за неуспѣшность изъ высшихъ классовъ гимназіи, было бы раціональнѣе устранять ихъ изъ низшихъ, и пр. Параллельно этому, конечно, и медицинское освидѣтельствованіе должно перестать быть пустою формальностью, и, распространяясь на первые годы пребыванія ребенка въ школѣ, предназначаться къ безпристрастной аттестаціи его здоровья и выносливости.

Я не стану развивать подробнѣе этой темы, считая достаточнымъ вышесказаннаго для оправданія возможности придать гимназическимъ и университетскимъ экзаменамъ такой характеръ, какой они должны имѣть на самомъ дѣлѣ. И если я заявляю себя такимъ горячимъ сторонникомъ экзаменовъ, если называю положительно вреднымъ устраненіе отъ экзаменовъ какъ худшихъ, такъ и лучшихъ учениковъ, то это главнымъ образомъ по той причинѣ, что считаю всякіе экзамены умственными маневрами, ревизіей наличности знанія и степени развитія учащихся и контролемъ надъ учащими. Такое значеніе экзамены пріобрѣтаютъ лишь при томъ

условіи, когда — повторяю — „очищеніе“ отъ несоотвѣтствующихъ субъектовъ сдѣлано уже ранѣе, скажемъ, напримѣръ, въ теченіе первыхъ четырехъ лѣтъ курса въ классическихъ гимназіяхъ. При такомъ предположеніи, преподаваніе въ высшихъ классахъ, освободившихъ отъ побочной обязанности дальнѣйшаго фильтрованія элементовъ годныхъ отъ негодныхъ, можетъ сдѣлаться безусловно правильнымъ; вопросъ объ удобовыполнимости программъ по тѣмъ либо другимъ предметамъ и о максимальной суммѣ требованій отъ окончивающихъ курсъ, безъ ущерба ихъ здоровью, тогда только и могъ бы быть рѣшенъ окончательно, не оставляя никакихъ сомнѣній. Тогда также стало бы яснымъ, что должно быть приписано *лѣни* отдѣльнаго ученика, и что—*неспособности* отдѣльнаго учителя. Однимъ словомъ, причины очень и очень многихъ *недоразумѣній*, мѣшающихъ нынѣ установленію какой либо одной рѣшительной системы, были бы тогда устранены сами собою, что — какъ мнѣ кажется — повліяло бы самымъ благотворнымъ образомъ на уравновѣшеніе столь противорѣчивыхъ еще теперь мнѣній о пользѣ той либо другой системы образованія.

Но возвратимся къ дѣйствительности, къ тому что есть, независимо отъ того что должно бы быть. Я сказалъ ранѣе, что откладываніе оцѣнки развитія и способностей ученика до послѣдняго дня его пребыванія въ школѣ, есть результатъ неумѣнія, ложнаго состраданія и трусости преподавателей. Если такъ, если даже окончательный экзаменъ превращается вслѣдствіе этого въ своего рода судъ, то какое-же право имѣютъ господа присяжные лишать во время такого суда несчастнаго подсудимаго права голоса? Вѣдь попалъ то онъ на скамью подсудимыхъ въ сущности по ихъ винѣ болѣе чѣмъ по своей, съ какой же статьи лишать его права экзаменоваться наравнѣ съ другими, на основаніи отмѣтокъ за послѣдній годъ пребыванія въ школѣ? Если онъ *навѣрное* негоденъ и будетъ лишь тормозить своей персоной срочное дѣло экзаменовъ, надо было умѣть рѣшить это ранѣе, *гораздо ранѣе*, не убивая безъ пользы 8 лѣтъ жизни будущаго гражданина Россіи, который могъ бы стать человѣкомъ и помимо аттестата зрѣлости. Согласитесь господа, что это нераціонально. Но, къ сожалѣнію, это „удобно“ съ той точки зрѣнія, что выпускной экзаменъ есть все таки контроль педагогической дѣятельности преподавателей, а такому контролю подвергается лишь наличность экзаменующихся; понятно, что во всѣхъ отношеніяхъ „удобнѣе“ устранить наканунѣ контроля всѣ тѣ документы, которые могутъ компрометировать, т. е. не допустить до экзаменовъ тѣхъ, кто имѣетъ больше шансовъ провалиться. И если родители такихъ „недопущенныхъ“ учениковъ называютъ подобную систему безсердечною,—нельзя съ ними не согласиться, сознавая даже, что половина вины надаетъ на ихъ головы.

Вышеуказанная нераціональность усугубляется еще тѣмъ обстоятельствомъ, что переводные экзамены изъ класса въ классъ, вмѣсто того чтобы быть однородно правильными и соразмѣренными

http://vofem.ru

съ среднимъ возрастомъ и суммою пріобрѣтенныхъ познаній, раздѣлены на какія то искусственныя категоріи. Я рѣшительно отказываюсь, напримѣръ, понимать, почему переходъ изъ нечетнаго класса гимназій въ четный долженъ быть болѣе легкимъ, чѣмъ наоборотъ—переходъ изъ четнаго въ нечетный. Знаю, что въ защиту такого порядка можно привести тѣ и другія соображенія, но — не думаю чтобы эти соображенія имѣли особенный вѣсъ съ чисто педагогической точки зрѣнія. А если господамъ присяжнымъ-экзаменаторамъ *некогда* судить столь же строго учениковъ нечетныхъ классовъ, въ виду необходимости отдать свое время выслушиванію подсудимыхъ изъ классовъ четныхъ, — то это не резонъ, а какая то несостоятельность системы распредѣленія времени, котораго *должно* хватать на все то, что необходимо сдѣлать.

При такомъ взглядѣ на равноправность переводныхъ экзаменовъ, при которой преподавателямъ низшихъ классовъ было бы гораздо легче составить правильное объ ученикѣ мнѣніе въ теченіе первыхъ трехъ, четырехъ лѣтъ его пребыванія въ заведеніи, я не могу, конечно, стоять какъ за освобожденіе отъ переводныхъ экзаменовъ учениковъ хорошихъ, такъ и за недопущеніе къ нимъ учениковъ плохихъ. Помимо соображеній, приведенныхъ въ первой бесѣдѣ, напомню еще, что общее повтореніе всего годичнаго курса, приведеніе въ болѣе надлежащій порядокъ пріобрѣтенныхъ въ году поурочно знаній, пополненіе кое какихъ неизбѣжныхъ пробѣловъ, — такъ же необходимы для хорошаго ученика, какъ и для посредственнаго. Съ другой стороны, не вижу также никакихъ основаній лишать хорошихъ учениковъ права „отличиться" на экзаменахъ и заслуживать награду; выдавать же таковую помимо экзаменовъ, на основаніи годичныхъ отмѣтокъ, и такимъ образомъ награждать ученика *вдвойнѣ*, разъ — посредствомъ освобожденія его отъ экзаменовъ и болѣе ранняго отпуска на каникулы, а другой — посредствомъ похвальнаго листа или книги, — не больно много ли будетъ, господа? *). Нельзя также умолчать о благотворномъ вліяніи періодически ежегодныхъ, все болѣе и болѣе трудныхъ экзаменовъ на выработку нервной стойкости, умствен-

*) Припоминаю слѣдующій фактъ изъ школьной практики начала 60-хъ годовъ. Въ той гимназіи, гдѣ я воспитывался, и гдѣ — какъ упоминалось — была принята система перевода лучшихъ учениковъ безъ экзамена, одинъ изъ наиболѣе прилежныхъ учениковъ былъ награжденъ золотою медалью при выпускѣ изъ 7-го класса (8-го класса тогда еще не было). Отправившись въ Кіевъ, онъ имѣлъ несчастіе провалиться на повѣрочномъ экзаменѣ въ университетѣ, не смотря на то, что экзамены эти были въ то время простою формальностью и производились обыкновенно по одному лишь предмету. Послѣ такой неудачи, онъ не могъ поступить въ университетъ иначе, какъ подвергнувшись общему повѣрочному испытанію, на которомъ онъ провалился *по всѣмъ предметамъ*, за исключеніемъ, кажется, одного или двухъ. — Во избѣженіе повторенія подобнаго скандала, гимназіи, о которой здѣсь рѣчь, ничего не оставалось, какъ постановить не выдавать впредь никому ни золотыхъ, ни серебряныхъ медалей, что и соблюдалось въ теченіе послѣдующихъ шести или семи лѣтъ.

наго самообладанія, присутствія духа, находчивости и пр.—вообще того, что я назову „храбростью знанія". Извѣстно, что такой храбрости не даютъ учащимся заучиваніе уроковъ и отвѣты въ классѣ передъ *своимъ* учителемъ, и ея отсутствіе весьма часто обнаруживается уже на окончательныхъ экзаменахъ, потому и „страшныхъ", что надо имъ подвергаться безъ предварительной привычки къ ихъ обстановкѣ и значенію. Какъ на такихъ экзаменахъ такъ и вообще потомъ въ жизни, недостатокъ этой храбрости знанія обнаруживается либо трусливой растерянностью и оглупѣніемъ, либо нервными припадками, либо наконецъ тѣмъ особеннымъ продуктомъ той-же трусости и малодушія, который можно назвать „нахальствомъ полузнанія", и который такъ хорошо извѣстенъ экзаменаторамъ, хотя подчасъ и вводитъ ихъ въ обманъ.

Мужество въ нашъ вѣкъ, измѣнило лозунгъ: прежніе „рыцари безъ страха и упрека" превратились нынѣ въ гражданъ, обладающихъ „храбростью чести и знанія". Развить воспитаніемъ храбрость чести—дѣло семьи; храбростью знанія—должна надѣлить школа. Можетъ ли она съ успѣхомъ выполнить эту задачу, отказавшись отъ правильныхъ и раціонально обставленныхъ экзаменовъ? Сомнѣваюсь. *Р. И.*

(Продолженіе слѣдуетъ.)

ЗАДАЧИ.

№ 333. Первая цыфра шестизначнаго числа есть единица; если ее переставить на мѣсто единицъ, то число увеличится втрое. Найти шестизначное число. (Заимств.) *В. Г.*

№ 334. Опредѣлить произведеніе $p \,.\, q$, гдѣ

$$p = (1 - x)(1 - x^3)(1 - x^5)(1 - x^7)\ldots$$

$$q = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)\ldots$$

М. Фридманъ (Кіевъ).

№ 335. Рѣшить уравненіе

$$(x + b + c)(x + c + a)(x + a + b)(a + b + c) = abcx.$$

(Заимств.) *П. И.*

№ 336. Даны двѣ параллельныя прямыя X и Y, и на первой изъ нихъ—точка A. Черезъ A проводимъ произвольную сѣкущую до пересѣченія съ Y въ точкѣ B; къ прямой AB возставляемъ перпендикуляръ изъ B, который пусть пересѣкаетъ X въ точкѣ C, и изъ средины BC—перпендикуляръ, который продолжаемъ до пересѣченія съ Y въ точкѣ D. Соединивъ D и C, опускаемъ на прямую DC изъ данной точки A перпендикуляръ AM. Найти геометрическое мѣсто точки M. *Н. Николаевъ* (Пенза).

№ 337. Показать, что ортоцентръ дѣлитъ высоты треугольника на части, произведеніе которыхъ есть величина постоянная.

А. Воиновъ (Харьковъ).

№ 338. Даны три концентрическія окружности, радіусы которыхъ соотвѣтственно равны r, $2r$ и $3r$. Построить такой равносторонній треугольникъ, котораго вершины лежатъ на этихъ трехъ окружностяхъ, и опредѣлить его сторону.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

ЗАДАЧИ НА ИСПЫТАНІЯХЪ ЗРѢЛОСТИ

въ $18^{90}/_{91}$ учебн. году.

Тамбовское реальное училище. VII кл. *Приложеніе алгебры къ геометріи:* Построить треугольникъ по основанію и по суммѣ двухъ другихъ сторонъ такъ, чтобы одинъ изъ угловъ, прилежащихъ основанію, былъ два раза болѣе другого.

(*Запасныя:*) *По алгебрѣ:* Разложить дробь $\frac{3+x}{(5-x)^2}$ на простѣйшія.

Приложеніе алгебры къ геометріи: Изъ точки, данной внѣ круга, проведены къ нему двѣ касательныя; провести третью касательну такъ, чтобы ея отрѣзокъ между данными касательными имѣлъ длину равную половинѣ одной изъ двухъ данныхъ.

VI кл. *По алгебрѣ:* 1. Девятый и одиннадцатый члены убывающей ариѳметической прогрессіи удовлетворяютъ уравненію

$$^1/_2 lg2 + lg\sqrt{x^2+4x+5} = {}^1/_2[lg(x^2-4x+5)+1].$$

Сумма всѣхъ членовъ, начиная съ перваго, равна $10^{1 - lg0{,}08(3)}$. Опредѣлить число членовъ.

2. Разложить 707 на два слагаемыхъ, обладающихъ слѣдующими свойствами: если первое слагаемое раздѣлить на 100, то въ остаткѣ получится 91; если же второе слагаемое раздѣлить на 59, то въ остаткѣ получится число, равное большему изъ корней уравненія $2x^2 - 81x + 117 = 0$.

По тригонометріи: Два различныхъ треугольника опредѣляются одними и тѣми же данными:

$$a = 75 \text{ фут.};\ b = 29 \text{ фут.};\ B = 16°15'36''.$$

Опредѣлить разность между площадями этихъ треугольниковъ.

По ариѳметикѣ: Вычислить:

$$^2/_7 \cdot 2{,}3(93)\ldots + 0{,}752\sqrt{3} + 1{,}24673 \cdot 2{,}45625^2$$

съ точностью до 0,00001.

http://vofem.ru

По геометріи: а) на построеніе. Построить треугольникъ, стороны котораго относились бы какъ $m : n : p$, а сумма основанія съ соотвѣтственной медіаной (т. е. линіей, соединяющей средину основанія съ вершиною противоположнаго угла), была бы равна данной прямой.

б) на вычисленіе. Въ шарѣ, радіусъ котораго r, просвѣрлено насквозь по направленію діаметра цилиндрическое отверстіе. Радіусъ цилиндрическаго отверстія равенъ $^1/_2$ радіуса шара. Опредѣлить объемъ остающейся части шара.

Тамбовская гимн. *По алгебрѣ:* Изъ всѣхъ равнобедренныхъ треугольниковъ, вписанныхъ въ кругъ радіуса r, опредѣлить тотъ, который имѣетъ наибольшую площадь?

По геометріи: Данный равносторонній треугольникъ обратить въ равномѣрный ему квадратъ?

По тригонометріи: Опредѣлить площадь сегмента по соотвѣтствующимъ ему дугѣ $a = 45°,5$ и хордѣ $a = 0,25$ фут.?

Варшавское реальное училище. VI кл. *По ариѳметикѣ:* Поле имѣетъ видъ прямоугольника, котораго длина содержитъ столько метровъ, сколько ширина ярдовъ. Метръ $= 3,28$ фута; ярдъ$=1^2/_7$ аршина. Граница вокругъ поля равна 7,536 версты. Поле продано по 120 руб. за десятину и вырученная сумма раздѣлена на 2 части: первая отдана въ банкъ по 6% и въ $7^1/_2$ м. она обратилась въ 25315 рублей, а другая, отданная по $4,5\%$ принесла $753^1/_2$ процентныхъ денегъ. Опредѣлить на сколько мѣсяцевъ была отдана вторая часть?

По геометріи: 1) Данъ шаръ радіуса R и на его большомъ кругѣ построенъ конусъ, котораго объемъ равенъ половинѣ объема даннаго шара. Опредѣлить радіусъ круга, образованнаго пересѣченіемъ шаровой поверхности съ коническою и отношеніе объема усѣченнаго конуса, образованнаго пересѣченіемъ даннаго конуса плоскостью вышеупомянутаго круга, къ объему верхняго, отсѣченнаго этою плоскостью сегмента.

2. Зная периметръ треугольника и отношеніе его угловъ $2 : 3 : 5$ построить треугольникъ.

По тригонометріи: Рѣшить треугольникъ по радіусамъ вписаннаго и описаннаго круговъ и одному углу ($R_1 r_1 \angle C$).

По алгебрѣ: 1) Серебряникъ имѣлъ 3 слитка: первый 82 пробы, во второмъ $68,75\%$ чистаго серебра, а въ третьемъ на 9 частей чистаго серебра приходится 7 частей лигатуры. Изъ этихъ слитковъ составленъ новый слитокъ въ 30 фун. вѣсу 72 пробы. Сколько фунтовъ взято отъ каждаго слитка?

2. Рѣшить систему уравненій:

$$\frac{xyz}{x+y} = a; \quad \frac{xyz}{y+z} = b; \quad \frac{xyz}{x+z} = c.$$

http://...

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 132 (2 сер.). Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC изъ вершины угла B опущенъ перпендикуляръ BD на гипотенузу AC. Найти на гипотенузѣ такую точку E, чтобы

$$BE^2 + 3BD = AC^2.$$

Указать другія свойства прямой BE.

Такъ какъ $BE^2 = BD^2 + DE^2$,, то изъ даннаго уравненія находимъ

$$DE^2 = AC^2 - 4BD^2 = (AB^2 - BD^2) + (BC^2 - BD^2) - 2BD^2 =$$

$$= AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC = (DC - AD)^2,$$

$$CE = CD - DE = CD - (CD - AD) = AD.$$

Отсюда слѣдуетъ, что

1) $$AE = CD$$

и

2) $$\frac{AE}{CE} = \frac{BC^2}{AB^2}.$$

Опуская перпендикуляры EP и EQ на стороны AB и BC, находимъ

$$EP : BC = AE : AC$$

и

$$EQ : AB = EC : AC$$

Слѣдовательно

$$EP = \frac{BC \cdot AE}{AC} = \frac{BC^3}{AC^2}$$

и

$$EQ = \frac{AB^3}{AC^2},$$

отсюда

$$EP : EQ = BC^3 : AB^3.$$

Если изъ какой нибудь точки E′ на прямой BE опустимъ перпендикуляры E′P′ и E′Q′ на стороны AB и BC, то

$$E'P' : E'Q' = BC^3 : AB^3.$$

Не трудно видѣть, что

$$\frac{\mathrm{Sin}ABE}{\mathrm{Sin}CBE} = \frac{BC^3}{AB^3},$$

откуда

$$\mathrm{tg}AB'E = \mathrm{tg}^3A; \qquad \mathrm{tg}CBE = \mathrm{tg}^3C.$$

П. Свѣшниковъ (Троицъ), *В. Россовская*. *К. Щиголевъ* (Курскъ).

http://vofem.ru

№ **260** (2 сер.). Рѣшить безъ помощи тригонометріи слѣдующую задачу (изъ Прям. Тригонометріи Верещагина, Спб. 1883, стр. 307, № 1463):

„Изъ двухъ мѣстъ A и B отправляются одновременно два поѣзда, соотвѣтственно по направленіямъ AD и BE, пересѣкающимся въ точкѣ C подъ угломъ 60°; оба поѣзда движутся равномѣрно и проходятъ каждый часъ: первый 20 верстъ, а второй 30 верстъ. Черезъ сколько часовъ со времени ихъ отправленія, разстояніе между ними сдѣлается равнымъ первоначальному (AB), если извѣстно, что разстояніе AC = 50 верстъ, а разстояніе BC = 40 верстъ?"

Такъ какъ AC = 50, BC = 40 и $\angle ACB = 60°$,

то $$AB^2 = 50^2 + 40^2 - 50 \cdot 40 = 2100.$$

Означимъ искомое число часовъ, чрезъ которое разстояніе BE сдѣлается равнымъ AB черезъ x, тогда

$$CD = 20x - 50, \qquad CE = 30x - 40.$$

Имѣемъ уравненіе

$$2100 = (20x - 50)^2 + (30x - 40)^2 - (20x - 50)(30x - 40),$$

которое приводится къ виду

$$7x^2 - 21x = 0,$$

Слѣд. $x = 3$.

А. П., *Н. Николаевъ* (Пенза), *А. Байковъ* (Москва), *Х. Едлинъ* (Кременчугъ), *О. Озаровская*, *А. Васильева* (Тифлисъ), *Ч. Рыбинскій* (Скопинъ), *А. Семеновъ* (Воронежъ), *В Костинъ* (Симбирскъ), *Б. Россовская*, *С. Пржиборовскій*, *К. Щиголевъ*, *Н. Платоновъ* (Курскъ), *А. Евсигнѣевъ* (Тамбовъ).

№ **267** (2 сер.). Въ треугольной пирамидѣ SABC, которой двугранный уголъ ASCB прямой, построенъ линейный уголъ ADB этого двуграннаго угла такъ, что стороны его проходятъ чрезъ вершины A и B основанія пирамиды. Опредѣлить объемъ этой пирамиды, если извѣстно, что ребро AB ея основанія равно a, площадь боковой грани ASC равна s и $\angle DAB = 30°$.

Въ прямоугольномъ треугольникѣ ADB уголъ DAB = 30°, гипотенуза = a, слѣдовательно катетъ $DB = \frac{a}{2}$, тогда катетъ $AD = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ и площадь $\triangle ADB = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$.

Пусть ребро $SC = y$, тогда площадь треугольника ASC, т. е. $s = \frac{ay\sqrt{3}}{4}$; $y = \frac{4s}{a\sqrt{3}}$.

http://vofem.ru

Данную пирамиду можно замѣнить суммою двухъ пирамидъ, такъ что

$$SABC = SADB + CADB,$$

но ребро SC перпендикулярно къ плоскости ADB, слѣдовательно

$$\text{объемъ } SADB = \frac{a^2\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{SC}{3}; \text{ объемъ } CADB = \frac{a^2\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{CD}{3},$$

отсюда

$$\text{об. } SABC = \frac{a^2\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{SC}{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{4s}{3a\sqrt{3}}$$

$$SABC = \frac{as}{6}.$$

А. П. (Пенза), *О. Озаровская*, *А. Васильева* (Тифлисъ), *В. Россовская*, *К. Щиголевъ* (Курскъ), *Х. Едлинъ* (Кременчугъ), *В. Херувимовъ* (Ромны), *И. Бѣлянкинъ* (Кіевъ), *А. Евсигнѣевъ* (Тамбовъ).

№ 271 (2 сер.). Найти значеніе k, при которомъ четыре корня биквадратнаго уравненія

$$9x^4 - 4(9k + 1)x^2 + (3k + 1)^2 = 0$$

составляютъ ариѳметическую прогрессію. Вычислить эти корни.

Пусть четыре корня даннаго уравненія суть

$$x,\ x + y,\ x + 2y,\ x + 3y.$$

Извѣстно, что

$$x(x + y)(x + 2y)(x + 3y) = \frac{(3k + 1)^2}{9} \quad . \ . \ . \ (1).$$

Такъ какъ сумма корней биквадратнаго уравненія всегда равна нулю, то

$$4x + 6y = 0 \quad \text{или} \quad y = -{}^2/_3x.$$

Подставимъ въ (1) вмѣсто y его значеніе $-{}^2/_3x$ и получимъ

$$x \cdot {}^1/_3x \cdot (-{}^1/_3x)(-x) = \frac{(3k + 1)^2}{9},$$

откуда

$$x = \sqrt{3k + 1} \quad \text{а} \quad y = -{}^2/_3\sqrt{3k + 1}.$$

Итакъ корни биквадратнаго уравненія суть

$$\sqrt{3x + 1},\ {}^1/_3\sqrt{3k + 1};\ -{}^1/_3\sqrt{3k + 1};\ -\sqrt{3k + 1} \ . \ . \ . \ (2).$$

http://vofem.ru

По извѣстной теоремѣ: сумма произведеній корней по два взятыхъ равна коэффиціенту при неизв. въ квадратѣ, получимъ

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = -{}^4/_9(9k + 1).$$

Подставивъ сюда значенія корней (2), имѣемъ

$$-{}^{10}/_9(3k + 1) = -{}^4/_9(9k + 1)$$

откуда $k = 1$.

Дѣйствительно, рѣшая биквадратное уравненіе

$$9x^4 - 40x^2 + 16 = 0,$$

находимъ, что его корни

$$2,\ {}^2/_3,\ -{}^2/_3\ -2$$

составляютъ ариѳметическую прогрессію съ разностью $-{}^4/_3$.

А. П. (Пенза), *М. Фридманъ* (Кіевъ), *В. Костинъ* (Симбирскъ), *В. Россовская*, *П. Писаревъ*, *К. Щеголевъ* (Курскъ), *Х. Едлинъ* (Кременчугъ).

№ 275 (2 сер.). Рѣшить систему

$$\frac{4}{y^2} + \frac{4 + y}{y} = \frac{8 + 4y}{x} + \frac{12y^2}{x^2}$$

и

$$4y^2 = x + xy.$$

Первое уравненіе при посредствѣ второго можно представить въ такомъ видѣ

$$4(1 + y)x^2 + \frac{x^3(1 + y)}{4} = {}^7/_4x^2(1 + y)^2 + x^2(1 + y),$$

или

$$x = 7y - 5$$

Рѣшая уравненія

$$x = 7y - 5$$

и

$$4y^2 = x + xy$$

получимъ

$$x_1 = 2;\ x_2 = -{}^{50}/_3$$

$$y_1 = 1;\ y_2 = -{}^5/_3.$$

Б. Лебедевъ (Житоміръ), *О. Озаровская*, *А. Васильева* (Тифлисъ), *В. Костинъ*, *А. Глассонъ* (Симбирскъ), *В. Россовская*, *П. Писаревъ*, *М. Цыбульскій*, *К. Александровъ*, *К. Щиголевъ* (Курскъ), *И. Вонсикъ*, *А. Семеновъ* (Воронежъ), *Х. Едлинъ*, *Б. Липавскій* (Кременчугъ).

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Одесса 4 Іюня 1892 года.
Типо-литографія Штаба Одесскаго военнаго Округа. Тираспольская, № 14.

http://vofem.ru